問題 2. V を有限次元ベクトル空間，U_1，U_2 を V の部分空間とし，$V = U_1 + U_2$ とする．
そのとき U_2 の部分空間 $U_2{}'$ で，

$$V = U_1 \oplus U_2{}'$$

となるものが存在することを示せ．

(解答)　U_2 における $U_1 \cap U_2$ の補空間を $U_2{}'$ とする．$U_2{}'$ は，U_2 の部分空間である．

$(U_1 \cap U_2{}') \subset U_2$ より，

$$U_1 \cap U_2{}' = U_1 \cap U_2{}' \cap U_2$$

が成り立つ．また，$U_2 = (U_1 \cap U_2) \oplus U_2{}'$ より，

$$(U_1 \cap U_2) \cap U_2{}' = \{0\}$$

である．よって，$U_1 \cap U_2{}' = \{0\}$ であることが示せた．

$V = U_1 + U_2$ より，任意の $v \in V$ に対し，

$$v = u_1 + u_2$$

を満たす $u_1 \in U_1$，$u_2 \in U_2$ が存在する．$U_2 = (U_1 \cap U_2) \oplus U_2{}'$ なので，

$$u_2 = u + u_2{}'$$

を満たす $u \in U_1 \cap U_2$，$u_2{}' \in U_2{}'$ が存在し，

$$v = u_1 + u_2 = u_1 + (u + u_2{}') = (u_1 + u) + u_2{}'$$

と表すことができる．ここで，$u_1 \in U_1$，$u \in U_1$ より，$u_1 + u \in U_1$ である．
よって，v は，$u_1 + u \in U_1$ と $u_2{}' \in U_2{}'$ の和で表せるので，
$V = U_1 + U_2{}'$ であることが示せた．

$U_1 \cap U_2{}' = \{0\}$，$V = U_1 + U_2{}'$ より，$V = U_1 \oplus U_2{}'$ であることが示せた．

ポイント：W が，V における U の補空間
$\iff$ U，W がベクトル空間 V の部分空間で，$V = U \oplus W$

V を有限次元ベクトル空間，U を V の部分空間とするとき，
V における U の補空間 W が存在する．

$V = U \oplus W \iff U \cap W = \{0\}$, $V = U + W$