**問題 3.** $V$ をベクトル空間，$U_1$，$U_2$，$\cdots$，$U_r$ を $V$ の有限次元部分空間とする．

そのとき一般には

$$\dim\,(U_1 + \cdots + U_r) \leqq \dim\,U_1 + \cdots + \dim\,U_r$$

であって，$U_1 + \cdots + U_r$ が直和であるときまたそのときに限って，等式

$$\dim\,(U_1 + \cdots + U_r) = \dim\,U_1 + \cdots + \dim\,U_r$$

が成り立つ．かつ，その場合，$i = 1,\ \cdots,\ r$ のおのおのに対し，$U_i$ の基底を $\alpha^{(i)} = \{u_1{}^{(i)},\ \cdots,\ u_{k_i}{}^{(i)}\}$ $(\dim\,U_i = k_i)$ とすれば，$\alpha^{(1)}$，$\alpha^{(2)}$，$\cdots$，$\alpha^{(r)}$ の元を並べて得られる $k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ 個の元の組

$$\alpha = \{u_1{}^{(1)},\ \cdots,\ u_{k_1}{}^{(1)},\ u_1{}^{(2)},\ \cdots,\ u_{k_2}{}^{(2)},\ \cdots,\ u_1{}^{(r)},\ \cdots,\ u_{k_r}{}^{(r)}\}$$

は $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ の基底となる．

この命題の証明せよ．

(解答)　$U_1$，$U_2$ は，$V$ の有限次元部分空間なので，

$$\dim\,(U_1 + U_2) \leqq \dim\,U_1 + \dim\,U_2$$

であり，$U_1 + U_2$，$U_3$ は，$V$ の有限次元部分空間なので，

$$\dim\,((U_1 + U_2) + U_3) \leqq \dim\,(U_1 + U_2) + \dim\,U_3$$

である．よって，

$$\dim\,(U_1 + U_2 + U_3) \leqq \dim\,U_1 + \dim\,U_2 + \dim\,U_3$$

である．以下，同様にしていくと，

$$\dim\,(U_1 + \cdots + U_r) \leqq \dim\,U_1 + \cdots + \dim\,U_r$$

が成り立つ．

和 $U_1 + \cdots + U_r$ が直和

$\iff$ 任意の $i$ $(2 \leqq i \leqq r)$ に対して　$(U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i = \{0\}$

$\iff$ 任意の $i$ $(2 \leqq i \leqq r)$ に対して

$$\dim\,(U_1 + \cdots + U_{i-1}) + \dim\,U_i = \dim\,(U_1 + \cdots + U_i)$$

$\iff$ $\dim\,(U_1 + \cdots + U_r) = \dim\,U_1 + \cdots + \dim\,U_r$

任意の $z \in U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ は，

$$z = u_1 + \cdots + u_r,\quad u_i \in U_i\ (i = 1,\ \cdots,\ r)$$

の形に一意的に表される．また，$u_i \in U_i$ は，

$$u_i = a_1{}^{(i)} u_1{}^{(i)} + \cdots + a_{k_i}{}^{(i)} u_{k_i}{}^{(i)}$$

の形に一意的に表される．よって，$z \in U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ は，

$$z = a_1{}^{(1)} u_1{}^{(1)} + \cdots + a_{k_1}{}^{(1)} u_{k_1}{}^{(1)} + \cdots + a_1{}^{(r)} u_1{}^{(r)} + \cdots + a_{k_r}{}^{(r)} u_{k_r}{}^{(r)}$$

の形に一意的に表される．よって，

$$\alpha = \{u_1{}^{(1)},\ \cdots,\ u_{k_1}{}^{(1)},\ u_1{}^{(2)},\ \cdots,\ u_{k_2}{}^{(2)},\ \cdots,\ u_1{}^{(r)},\ \cdots,\ u_{k_r}{}^{(r)}\}$$

は $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ の基底となることが示せた．

ポイント：$U$，$W$ は，$V$ の有限次元部分空間のとき，
$\dim\,(U+W) \leqq \dim U + \dim W$

$U$，$W$ は，$V$ の有限次元部分空間のとき，
$U+W$ も $V$ の有限次元部分空間である．

$U$，$W$ は，$V$ の有限次元部分空間で，$U \cap W = \{0\}$ のとき，
$\dim\,(U+W) = \dim U + \dim W$

任意の $i$ $(2 \leqq i \leqq r)$ に対して，$\dim\,(U_1+\cdots+U_{i-1})+\dim U_i = \dim\,(U_1+\cdots+U_i)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dim U_1 + \dim U_2 = \dim\,(U_1+U_2) \\ \dim\,(U_1+U_2) + \dim U_3 = \dim\,(U_1+U_2+U_3) \\ \cdots, \\ \dim\,(U_1+\cdots+U_{r-1}) + \dim U_r = \dim\,(U_1+\cdots+U_r) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \dim\,(U_1+\cdots+U_r) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r$

任意の $z \in U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ は，
$z = u_1 + \cdots + u_r,\quad u_i \in U_i\ (i=1,\ \cdots,\ r)$ の形に一意的に表される．

$U_i$ の基底を $\{u_1{}^{(i)},\ \cdots,\ u_{k_i}{}^{(i)}\}$ とすれば，任意の $u_i \in U_i$ は，
$u_i = a_1{}^{(i)}u_1{}^{(i)} + \cdots + a_{k_i}{}^{(i)}u_{k_i}{}^{(i)}$ の形に一意的に表される．

任意の $z \in U\ \ (\dim U = n)$ に対し，$v_1,\ \cdots,\ v_n$ の 1 次結合として，
$z = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ の形に一意的に表されるならば，
$\{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$ は，$U$ の基底となる．