問題 4. 命題6.25において，与えられた P_i は，結論の直和分解 $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$ から定まる V から U_i への射影に等しいことを示せ.

命題6.25　P_i $(i=1,\ \cdots,\ r)$ がベクトル空間 V の射影子で,

$$i \neq j \text{ ならば } P_iP_j = 0,\quad P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$$

を満たすならば，$\mathrm{Im}\ P_i = U_i$ とおくとき,

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$$

となる.

(解答)　$P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$ を満たすので,

$$P_i(P_1 + P_2 + \cdots + P_r) = P_i$$

が成り立つ．さらに，$i \neq j$ ならば $P_iP_j = 0$ を満たすので,

$$P_i^2 = P_i$$

が成り立つ.

また，任意の $v \in V$ は一意的に

$$v = u_1 + u_2 + \cdots + u_r,\quad u_i \in U_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

と表すことができる．$\mathrm{Im}\ P_1 = U_1$，$\mathrm{Im}\ P_2 = U_2$，$\cdots$，$\mathrm{Im}\ P_r = U_r$ より，ある $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_r \in V$ が存在して,

$$P_1(v_1) = u_i,\quad P_2(v_2) = u_2,\quad \cdots,\quad P_r(v_r) = u_r$$

が成り立つ．$i \neq j$ ならば $P_iP_j = 0$ を満たすので,

$$\begin{aligned} P_i(v) &= P_i(u_1 + u_2 + \cdots + u_r) \\ &= P_i(u_1) + P_i(u_2) + \cdots + P_i(u_r) \\ &= P_iP_1(v_1) + P_iP_2(v_2) + \cdots + P_iP_r(v_r) \\ &= P_i^2(v_i) = P_i(v_i) = u_i \end{aligned}$$

が成り立つ.

よって，P_i は，V から U_i への射影に等しいことが示せた.

ポイント：$i \neq j$ ならば $P_iP_j = 0$，$P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$ を満たすならば，
$P_i^2 = P_i$ が成り立つ.

任意の $v \in U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$ は一意的に
$v = u_1 + u_2 + \cdots + u_r$,　$u_i \in U_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ と表すことができる.

$\mathrm{Im}\ P_j = U_j$ ならば，任意の $u_j \in U_j$ に対し，ある $v_j \in V$ が存在して,
$P_j(v_j) = u_j$ を満たす.

本問題は，任意の $v = u_1 + \cdots + u_r \in V$ $(u_1 \in U_1,\ \cdots,\ u_r \in U_r)$ に対し,
$P_i(v) = u_i$ を示せばよい.