問題 6. ベクトル空間 V の線型変換 F が $\mathrm{Ker}\ F^2 = \mathrm{Ker}\ F$，$\mathrm{Im}\ F^2 = \mathrm{Im}\ F$ を満たすならば，$V = \mathrm{Im}\ F \oplus \mathrm{Ker}\ F$ であることを証明せよ．この問題では V を有限次元とは仮定しない．

(解答)　任意の $v \in \mathrm{Im}\ F \cap \mathrm{Ker}\ F$ に対し，

あるが $w \in V$ が存在して $v = F(w)$,　　$F(v) = 0$

が成り立つ．

$F^2(w) = F(v) = 0$ となるので，$w \in \mathrm{Ker}\ F^2$ となる．$\mathrm{Ker}\ F^2 = \mathrm{Ker}\ F$ より，$w \in \mathrm{Ker}\ F$ となるので，$F(w) = 0$ が成り立つ．$v = F(w)$ より，$v = 0$ となるので，$\mathrm{Im}\ F \cap \mathrm{Ker}\ F = \{0\}$ であることが示せた．

また，任意の $v \in V$ に対し，$F(v) \in \mathrm{Im}\ F = \mathrm{Im}\ F^2$ より，

ある $z \in V$ が存在して $F(v) = F^2(z)$

が成り立つ．

$F(v - F(z)) = F(v) - F^2(z) = 0$ となるので，$v - f(z) \in \mathrm{Ker}\ F$ である．

よって，v は，$f(z) \in \mathrm{Im}\ F$ と $v - f(z) \in \mathrm{Ker}\ F$ の和で表せるので，$V = \mathrm{Im}\ F + \mathrm{Ker}\ F$ であることが示せた．

$\mathrm{Im}\ F \cap \mathrm{Ker}\ F = \{0\}$，$V = \mathrm{Im}\ F + \mathrm{Ker}\ F$ より，$V = \mathrm{Im}\ F \oplus \mathrm{Ker}\ F$ であることが示せた．

ポイント：$V = \mathrm{Im}\ F \oplus \mathrm{Ker}\ F \iff \mathrm{Im}\ F \cap \mathrm{Ker}\ F = \{0\},\ V = \mathrm{Im}\ F + \mathrm{Ker}\ F$

$$\begin{cases} v \in \mathrm{Im}\ F \iff \text{ある } w \in V \text{ が存在して } v = F(w) \\ v \in \mathrm{Ker}\ F \iff F(v) = 0 \end{cases}$$

任意の $v \in \mathrm{Im}\ F \cap \mathrm{Ker}\ F$ に対し，$v = 0$ となる $\iff \mathrm{Im}\ F \cap \mathrm{Ker}\ F = \{0\}$

$F(v) \in \mathrm{Im}\ F^2 \iff$ ある $z \in V$ が存在して $F(v) = F^2(z)$

ベクトル空間 V の線型変換 F に対し，

$F(v + w) = F(v) + F(w)$　$(v,\ w \in V)$ が成り立つ．

任意の $v \in V$ に対し，ある $v_1 \in V_1$，$v_2 \in V_2$ が存在して，$v = v_1 + v_2$
$\iff V = V_1 + V_2$

V が有限次元ならば，次元定理を用いた別解が存在する．