問題 11. V を有限次元ベクトル空間とすれば，V の任意の線型変換 F は，V の適当な射影子 P と正則な線型変換 G とによって $F = GP$ と表されることを示せ．

(解答) V の次元を n とし，$\alpha = \{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底とする．このとき，線型変換 F に対し，F の基底 α に関する表現行列 $[F]_\alpha$ を A とすると，A は n 次正方行列である．

このとき，ある n 次基本行列 Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_k をとると，A に左から掛けることで，対角成分以外の成分がすべて 0 であり，対角成分が 1 または 0 であるような n 次正方行列 J に変形することができる．すなわち，

$$Q_k Q_{k-1} \cdots Q_1 A = J$$

が成り立つ．Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_k は正則行列なので，$Q_k Q_{k-1} \cdots Q_1 = Q$ は逆行列 Q^{-1} が存在する．両辺に Q^{-1} を掛けると，

$$A = Q^{-1} J$$

が成り立つ．

基底 α に関する表現行列が Q^{-1} である線型変換を G とおくと，G は正則な線型変換であり，基底 α に関する表現行列が J である線型変換を P とおくと，P は V の射影子となる．

よって，線型変換 F は，V の適当な射影子 P と正則な線型変換 G とによって $F = GP$ と表されることが示せた．

ポイント：n 次単位行列 I_n に行基本変形をほどこして得られる行列を，
n 次基本行列という．
基本行列は，正則行列である．

n 次正方行列 A は，行基本変形を有限回くり返すと，
対角成分以外の成分がすべて 0 であり，
対角成分が 1 または 0 であるような n 次正方行列に変形することができる．

行基本変形をすることは，n 次基本行列を左から掛けることである．

基底 α に関する表現行列が正則行列である線型変換を G とおくと，
G は正則な線型変換である．

対角成分以外の成分がすべて 0 であり，
対角成分が 1 または 0 であるような n 次正方行列 J に対し $J^2 = J$ となるので，
基底 α に関する表現行列が J である線型変換を P とおくと，$P^2 = P$ となる．

$P^2 = P$ であるような V の線型変換 P を V の射影子とよぶ．