問題 8. F を，$F^2 = I$ であるような，ベクトル空間 V の線型変換とする．そのとき

$$U = \{v | v \in V,\ F(v) = v\},\ W = \{v | v \in V,\ F(v) = -v\}$$

とおけば，U，W は V の部分空間であって，$V = U \oplus W$ となることを証明せよ．さらに，もし V が有限次元で $\dim V = n$ ならば，

$$\mathrm{rank}\ (F - I) + \mathrm{rank}\ (F + I) = n$$

であることを示せ．

(解答) $0 \in V$ かつ $F(0) = 0$ より，$0 \in U$

であり，

$u,\ v \in U$ ならば，$u + v \in V$ かつ $F(u + v) = F(u) + F(v) = u + v$
となるので，$u + v \in U$

であり，

任意の実数 c に対して，$cu \in V$ かつ $F(cu) = cF(u) = cu$
となるので，$cu \in U$

である．よって，U は V の部分空間である．同様に，

$0 \in V$ かつ $F(0) = 0$ より，$0 \in W$

であり，

$u,\ v \in U$ ならば，$u + v \in W$ かつ $F(u + v) = F(u) + F(v) = -(u + v)$
となるので，$u + v \in W$

であり，

任意の実数 c に対して，$cu \in V$ かつ $F(cu) = cF(u) = -cu$
となるので，$cu \in W$

である．よって，W は V の部分空間である．

任意の $v \in U \cap W$ に対し，$F(v) = v$，$F(v) = -v$ が成り立つ．$-v = F(v)$ より，$F(-v) = F^2(v) = I(v) = v$ となるので，

$$0 = F(0) = F(v + (-v)) = F(v) + F(-v) = v + v = 2v$$

が成り立つ．よって，$v = 0$ となるので，$U \cap W = \{0\}$ であることが示せた．

また，任意の $v \in V$ に対し，

$$F\left(\frac{v + F(v)}{2}\right) = \frac{F(v) + F^2(v)}{2} = \frac{F(v) + I(v)}{2} = \frac{F(v) + v}{2} = \frac{v + F(v)}{2},$$

$\dfrac{v + F(v)}{2} \in V$ より，$\dfrac{v + F(v)}{2} \in U$ であり，

$$F\left(\frac{v - F(v)}{2}\right) = \frac{F(v) - F^2(v)}{2} = \frac{F(v) - I(v)}{2} = \frac{F(v) - v}{2} = -\frac{v - F(v)}{2},$$

$\dfrac{v - F(v)}{2} \in V$ より，$\dfrac{v - F(v)}{2} \in W$ である．

よって，v は，$\dfrac{v + F(v)}{2} \in U$ と $\dfrac{v - F(v)}{2} \in W$ の和で表せるので，$V = U + W$ であることが示せた．

$U \cap W = \{0\}$，$V = U + W$ より，$V = U \oplus W$ であることが示せた．

(続き)　　任意の $v \in V$ に対し，$(F-I)(v) = F(v) - I(v) = F(v) - v$ となるので，

$$(F-I)(v) = 0 \iff F(v) = v$$

が成り立つ．よって，

$$U = \mathrm{Ker}\ (F-I)$$

である．同様に，任意の $v \in V$ に対し，$(F+I)(v) = F(v) + I(v) = F(v) + v$ となるので，

$$(F+I)(v) = 0 \iff F(v) = -v$$

が成り立つ．よって，

$$W = \mathrm{Ker}\ (F+I)$$

である．

$$\mathrm{rank}\ (F-I) = \dim\ (\mathrm{Im}\ (F-I)) = n - \dim\ (\mathrm{Ker}\ (F-I)) = n - \dim U$$

であり，

$$\mathrm{rank}\ (F+I) = \dim\ (\mathrm{Im}\ (F+I)) = n - \dim\ (\mathrm{Ker}\ (F+I)) = n - \dim W$$

である．また，$V = U \oplus W$ より，

$$\dim V = \dim\ (U \oplus W) = \dim U + \dim W$$

が成り立つので，

$$\dim U + \dim W = n$$

である．

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\ (F-I) + \mathrm{rank}\ (F+I) &= (n - \dim U) + (n - \dim W) \\ &= 2n - (\dim U + \dim W) = n\end{aligned}$$

が成り立つ．

以上より，題意は全て示せた．

ポイント：U は V の部分空間であるための条件は，以下の 3 つが成り立つことである．

(i)　$0 \in U$

(ii)　u，$v \in U$ ならば，$u + v \in U$

(iii)　任意の実数 c に対して，$cu \in U$

$V = U \oplus W$ であるための条件は，以下の 2 つが成り立つことである．

(i)　$U \cap W = \{0\}$

(ii)　$V = U + W$

任意の線型変換 F に対し，$\mathrm{rank}\ F = \dim\ (\mathrm{Im}\ (F)) = n - \dim\ (\mathrm{Ker}\ (F))$

U，W が V の有限次元部分空間ならば，$\dim\ (U \oplus W) = \dim U + \dim W$