問題 4. V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間，f を V 上の任意の双 1 次形式 (対称とは仮定しない) とする．そのとき

$$g(v) = f(v,\ v)$$

によって写像 $g : V \to \boldsymbol{K}$ を定義すれば，g は V 上の 2 次形式であることを示せ．その極形式は何か．

(解答) $h(u,\ v) = \dfrac{f(u,\ v) + f(v,\ u)}{2}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
h(u+u',\ v) &= \frac{f(u+u',\ v) + f(v,\ u+u')}{2} \\
&= \frac{f(u,\ v) + f(u',\ v)}{2} + \frac{f(v,\ u) + f(v,\ u')}{2} \\
&= \frac{f(u,\ v) + f(v,\ u)}{2} + \frac{f(u',\ v) + f(v,\ u')}{2} \\
&= h(u,\ v) + h(u',\ v)
\end{aligned}$$

$$h(cu,\ v) = \frac{f(cu,\ v) + f(v,\ cu)}{2} = \frac{cf(u,\ v) + cf(v,\ u)}{2} = ch(u,\ v)$$

$$h(u,\ v) = \frac{f(u,\ v) + f(v,\ u)}{2} = \frac{f(v,\ u) + f(u,\ v)}{2} = h(v,\ u)$$

となるので，h は対称双 1 次形式である．

$$g(v) = f(v,\ v) = \frac{f(v,\ v) + f(v,\ v)}{2} = h(v,\ v)$$

より，g は V 上の 2 次形式であることが示せた．また，極形式は $\dfrac{f(u,\ v) + f(v,\ u)}{2}$ である．

ポイント：$f(u,\ v)$ が双 1 次形式 $\iff \begin{cases} f(u+u',\ v) = f(u,\ v) + f(u',\ v) \\ f(cu,\ v) = cf(u,\ v) \\ f(u,\ v+v') = f(u,\ v) + f(u,\ v') \\ f(u,\ cv) = cf(u,\ v) \end{cases}$

$h(u,\ v)$ が対称双 1 次形式 $\iff \begin{cases} h(u+u',\ v) = h(u,\ v) + h(u',\ v) \\ h(cu,\ v) = ch(u,\ v) \\ h(u,\ v) = h(v,\ u) \end{cases}$

h が V 上の対称双 1 次形式であるとき，
$g(v) = h(v,\ v)$ は V 上の 2 次形式である．