**問題 1.**　$f$ を $n$ 次元ベクトル空間 $V$ 上のエルミート双 1 次形式，$\mathcal{B}$ を $V$ の任意の基底とする．$f$ の階数は表現行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}}$ の階数に等しいことを示せ．また $f$ が正則であることは行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}}$ が正則であることと同等であることを示せ．

(解答)　$\mathcal{B}' = \{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$ をエルミート双 1 次形式 $f$ に関する直交基底とし，

$$f(v_i,\ v_i) = c_i \qquad (i = 1,\ \cdots,\ n)$$

とおけば，$\mathcal{B}'$ に関する表現行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}'}$ は，対角行列

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

となる．ここで，表現行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}}$ を $A$ とし，$\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列を $P = T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ とすると，$P^*AP = C$ であり，$P^*$，$P$ は正則行列より，

$$\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ C$$

である．rank $C$ は，$c_i \neq 0$ を満たす $i$ の個数に等しいので，$f$ の階数に等しい．

よって，$f$ の階数は表現行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}}$ の階数に等しいことが示せた．

次に，$f$ が正則であることは行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}}$ が正則であることと同等であることを示す．

$$\begin{aligned} f\ \text{が正則である} &\iff c_i \neq 0\ \text{を満たす}\ i\ \text{の個数が}\ n\ \text{個} \\ &\iff [\ f\ ]_{\mathcal{B}'}\ \text{が正則} \\ &\iff [\ f\ ]_{\mathcal{B}}\ \text{が正則} \end{aligned}$$

となるので，題意は示した．

ポイント：エルミート双 1 次形式 $f$ に関する直交基底 $\mathcal{B}' = \{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$ に対し，
$f(v_i,\ v_i) = c_i \quad (i = 1,\ \cdots,\ n)$ とおくと，
$\mathcal{B}'$ に関する表現行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}'}$ は，対角行列となる．

エルミート双 1 次形式 $f$ に関する 2 つの基底 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$ に対し，
表現行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}}$ を $A$，表現行列 $[\ f\ ]_{\mathcal{B}'}$ を $A'$，
$\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列を $P = T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ とすると，
$P$ は正則行列であり，$P^*AP = A'$ である．

$P^*AP = A'$ であり，$P^*$，$P$ が正則行列ならば，rank $A$ = rank $A'$

$f(v_i,\ v_i) = c_i \quad (i = 1,\ \cdots,\ n)$ とするとき，
$f$ の階数は，$c_i \neq 0$ を満たす $i$ の個数であり，
$f$ が正則であるとは，$c_i \neq 0$ を満たす $i$ の個数が $n$ 個のときである．