問題 2. f を n 次元ベクトル空間 V 上のエルミート双1次形式とし，V_0 を，f に関して V のすべての元と直交するような V の元全体の集合とする．V_0 は V の部分空間であることを示せ．また，V_0 の次元は f の退化次数に等しいことを示せ．(この V_0 はエルミート双1次形式 f の核とよばれる．f が正則であることは，その核が $\{0\}$ であることにほかならない．)

(解答) 任意の $v' \in V$ に対し，$f(v',\ 0) = 0$ となるので，$0 \in V_0$
であり，

$u,\ v \in V_0$ ならば，任意の $v' \in V$ に対し，$f(v',\ u) = f(v',\ v) = 0$ より，
$f(v',\ u+v) = f(v',\ u) + f(v',\ v) = 0$ となるので，$u+v \in V_0$
であり，

$u \in V_0$ ならば，任意の $v' \in V$ に対し，$f(v',\ u) = 0$ より，
任意の実数 c に対して，$f(v',\ cu) = cf(v',\ u) = 0$ となるので，$cu \in V_0$
である．よって，V_0 は V の部分空間である．

V の直交基底を $\mathcal{B} = \{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$ とする．任意の $v' \in V$ は，

$$v' = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \quad (a_i\text{は実数})$$

の形に一意に表される．同様に，任意の $v \in V_0$ は，

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \quad (x_i\text{は実数})$$

の形に一意に表される．このとき，

$$\begin{aligned} f(v',\ v) &= a_1x_1f(v_1,\ v_1) + \cdots + a_nx_nf(v_n,\ v_n) \\ &\qquad +(a_1x_2+a_2x_1)f(v_1,\ v_2)+\cdots+(a_{n-1}x_n+a_nx_{n-1})f(v_{n-1},\ v_n) \\ &= a_1x_1f(v_1,\ v_1) + \cdots + a_nx_nf(v_n,\ v_n) \end{aligned}$$

となる．任意の $v' \in V$ に対し，$f(v',\ v) = 0$ が成り立つための条件は，

$$f(v_i,\ v_i) \neq 0 \implies x_i = 0$$

である．よって，V_0 の次元は $f(v_i,\ v_i) = 0$ を満たす i の個数，すなわち f の退化次数に等しいことが示せた．

ポイント：U は V の部分空間であるための条件は，以下の3つが成り立つことである．

(ⅰ) $0 \in U$

(ⅱ) $u,\ v \in U$ ならば，$u+v \in U$

(ⅲ) 任意の実数 c に対して，$cu \in U$

V の直交基底を $\mathcal{B} = \{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$ とするとき，
$i \neq j$ のとき，$f(v_i,\ v_j) = 0$

V_0 の基底は，$\{v_i \mid f(v_i,\ v_i) = 0\}$