問題 5. W を V の部分空間とし，V から W への正射影を P とする．次のことを示せ．

(a) 任意の $v \in V$ に対して $||p(v)|| \leqq ||v||$.

(解答) $\{v_1, \cdots, v_r\}$ を W の 1 つの正規直交基底とし，V の正規直交基底を $\{v_1 \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ とする．任意の $v \in V$ に対し，

$$P(v) = \sum_{i=1}^{r} (v_i|v)v_i$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v_i|v)v_i$$

である．よって，

$$||P(v)||^2 = \sum_{i=1}^{r} |(v_i|v)|^2$$

$$||v||^2 = \sum_{i=1}^{n} |(v_i|v)|^2 = ||P(v)||^2 + \sum_{i=r+1}^{n} |(v_i|v)|^2 \geqq ||P(v)||^2$$

となるので，題意は示した．

ポイント：V から W への正射影を考えているので，V は有限次元内積空間である．

V を有限次元内積空間，W を V の部分空間とするとき，
$\dim V = n$，$\dim W = r$ とすると，
W の 1 つの正規直交基底を $\{v_1, \cdots, v_r\}$ とすると，
V の正規直交基底 $\{v_1 \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ に拡大することができる．

$\{v_1, \cdots, v_r\}$ を W の 1 つの正規直交基底，
V の正規直交基底を $\{v_1 \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ とするとき，

$$P(v) = \sum_{i=1}^{r} (v_i|v)v_i, \quad v = \sum_{i=1}^{n} (v_i|v)v_i$$

任意の $v \in V$ に対し，$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ とすると，

$$||v||^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

問題 5. W を V の部分空間とし，V から W への正射影を P とする．次のことを示せ．

(b) 任意の $v \in V$ と任意の $w \in W$ に対して

$$||v - P(v)|| \leqq ||v - w||.$$

(解答) $\{v_1, \cdots, v_r\}$ を W の 1 つの正規直交基底とし，V の正規直交基底を $\{v_1 \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ とする．任意の $v \in V$ に対し，

$$P(v) = \sum_{i=1}^{r} (v_i|v)v_i$$
$$v = \sum_{i=1}^{n} (v_i|v)v_i$$

であり，

$$v - P(v) = \sum_{i=r+1}^{n} (v_i|v)v_i$$

である．また，任意の $w \in W$ に対し，

$$w = \sum_{i=1}^{r} x_i v_i$$

と表せるので，

$$v - w = \sum_{i=1}^{r} \{(v_i|v) - x_i\}v_i + \sum_{i=r+1}^{n} (v_i|v)v_i$$

である．このとき，

$$||v - P(v)||^2 = \sum_{i=r+1}^{n} |(v_i|v)|^2$$
$$||v - w||^2 = \sum_{i=1}^{r} |(v_i|v) - x_i|^2 + \sum_{i=r+1}^{n} |(v_i|v)|^2 \geqq ||v - P(v)||^2$$

となるので，題意は示した．

(c) (b) において等号が成り立つのは $w = P(v)$ のときに限る．

(解答) (b) において等号が成り立つのは，

$$x_i = (v_i|v) \quad (i = 1, \cdots, r) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つときに限る．①は，

$$w = \sum_{i=1}^{r} (v_i|v)v_i = P(v)$$

と同値であるので，題意は示した．