問題4. v_1, v_2, $\cdots$, v_r を内積空間 V の 0 でない元とするとき,

$$||v_1+v_2+\cdots+v_r|| \leqq ||v_1||+||v_2||+\cdots+||v_r||$$

であることを証明せよ. 等号はどんな場合に成り立つか.

(解答)

$$\begin{aligned}
||v_1+v_2+\cdots+v_r||^2 &= (v_1+v_2+\cdots+v_r|v_1+v_2+\cdots+v_r) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(v_k|v_k) + \sum_{1\leqq i<j\leqq n}\{(v_i|v_j)+(v_j|v_i)\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}||v_k||^2 + \sum_{1\leqq i<j\leqq n}\{(v_i|v_j)+\overline{(v_i|v_j)}\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}||v_k||^2 + \sum_{1\leqq i<j\leqq n}2\mathrm{Re}(v_i|v_j) \\
&\leqq \sum_{k=1}^{n}||v_k||^2 + \sum_{1\leqq i<j\leqq n}2|(v_i|v_j)| \\
&\leqq \sum_{k=1}^{n}||v_k||^2 + \sum_{1\leqq i<j\leqq n}2||v_i||\ ||v_j|| \\
&= (||v_1||+||v_2||+\cdots+||v_r||)^2
\end{aligned}$$

となるので, 題意は示した.

また, 等号が成立するのは, 任意の $i<j$ に対し,

$$||v_i||\ ||v_j|| = |(v_i|v_j)| = \mathrm{Re}(v_i|v_j)$$

が成り立つときである.

$$||v_i||\ ||v_j|| = |(v_i|v_j)| \iff v_j = c_{ij}v_i,\ c_{ij}>0$$

であり,

$$v_j = c_{ij}v_i,\ c_{ij}>0 \Longrightarrow |(v_i|v_j)| = \mathrm{Re}(v_i|v_j)$$

であるので,

$$||v_i||\ ||v_j|| = |(v_i|v_j)| = \mathrm{Re}(v_i|v_j) \iff v_j = c_{ij}v_i,\ c_{ij}>0$$

が成り立つ.

$$v_j = c_{ij}v_i,\ c_{ij}>0\ (1\leqq i<j\leqq n) \iff v_j = c_jv_1,\ c_j>0\ (j=2,\ \cdots,\ r)$$

より, 等号成立の条件は, $v_j = c_jv_1$, $c_j>0$ $(j=2,\ \cdots,\ r)$ である.

ポイント：内積空間 V の任意の元 u, v に対し,

$$(u|v)+(v|u) = (u|v)+\overline{(u|v)} = 2\mathrm{Re}(u|v),\quad \mathrm{Re}(u|v) \leqq |(u|v)| \leqq ||u||\ ||v||$$

「$P \iff Q$ かつ $Q \Longrightarrow R$」$\iff$「P かつ $R \iff Q$」

$v_j = c_{ij}v_i$, $c_{ij}>0$ とは,
$v_j = c_{ij}v_i$ となるような $c_{ij}>0$ が存在するという意味である.