問題1. V, V' を $\boldsymbol{K}$ 上の同じ次元の内積空間とする．写像 $F: V \to V'$(‘線型’とは仮定しない！) が内積を保存すれば，すなわち任意の u, $v \in V$ に対して

$$(F(u)|F(v)) = (u|v)$$

が成り立つとすれば，F は計量同型写像であることを次の順序で証明せよ．

(a) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の正規直交基底とすれば，$\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$ は V' の正規直交基底となることを示せ．

(解答) 任意の $i \in \{1, \cdots, n\}$ に対し，

$$||F(v_i)||^2 = (F(v_i)|F(v_i)) = (v_i|v_i) = ||v_i||^2 = 1$$
$$||F(v_i)|| = 1$$

である．また，任意の i, $j \in \{1, \cdots, n\}$ $(i \neq j)$ に対し，

$$(F(v_i)|F(v_j)) = (v_i|v_j) = 0$$

となるので，$F(v_1)$, $\cdots$, $F(v_n)$ は内積空間 V' の正規直交系であり，
$F(v_1)$, $\cdots$, $F(v_n)$ は一次独立である．V, V' の次元が同じなので，
$\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$ は V' の正規直交基底となることが示せた．

ポイント：V' を n 次元の内積空間とする．

$\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$ が V' の正規直交基底

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{任意の } i \in \{1, \cdots, n\} \text{ に対し，} ||F(v_i)|| = 1 \\ \text{任意の } i,\ j \in \{1, \cdots, n\}\ (i \neq j) \text{ に対し，} (F(v_i)|F(v_j)) = 0 \\ F(v_1), \cdots, F(v_n) \text{ は一次独立.} \end{cases}$$

$\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$ が直交系 $\Longrightarrow$ $\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$ は一次独立

(b) 任意の $j (1 \leqq j \leqq n)$ に対して

$$(F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) - c_1F(v_1) - \cdots - c_nF(v_n)|F(v_j)) = 0$$

が成り立つことを示せ．

(解答) $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \in V$ より，

$$(F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n)|F(v_j)) = (c_1v_1 + \cdots + c_nv_n|v_j)$$

であり，

$$\begin{aligned}&(c_1F(v_1) + \cdots + c_nF(v_n)|F(v_j)) \\ &\qquad = c_1(F(v_1)|F(v_j)) + \cdots + c_n(F(v_n)|F(v_j)) \\ &\qquad = c_1(v_1|v_j) + \cdots + c_n(v_n|v_j) = (c_1v_1 + \cdots + c_nv_n|v_j)\end{aligned}$$

となるので，

$$(F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) - c_1F(v_1) - \cdots - c_nF(v_n)|F(v_j)) = 0$$

が成り立つ．

問題 1． V，V' を $\boldsymbol{K}$ 上の同じ次元の内積空間とする．写像 $F : V \to V'$(‘線型’とは仮定しない！) が内積を保存すれば，すなわち任意の u，$v \in V$ に対して

$$(F(u)|F(v)) = (u|v)$$

が成り立つとすれば，F は計量同型写像であることを次の順序で証明せよ．

(c)　(b) から

$$F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1F(v_1) + \cdots + c_nF(v_n)$$

を (すなわち F の線型性を) 導け．

(解答)　$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の正規直交基底であるとする．このとき，(a) より $\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$ は V' の正規直交基底である．

$$F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) - c_1F(v_1) - \cdots - c_nF(v_n) \neq 0$$

であると仮定すると，(b) より，

$$F(v_1),\ \cdots,\ F(v_n),\ F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) - c_1F(v_1) - \cdots - c_nF(v_n)$$

が直交系となるので，

$$F(v_1),\ \cdots,\ F(v_n),\ F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) - c_1F(v_1) - \cdots - c_nF(v_n)$$

が一次独立となり，V' が n 次元内積空間であることに矛盾する．よって，

$$F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1F(v_1) + \cdots + c_nF(v_n)$$

が成り立つ．このとき，F は線型写像なので，任意の v_1，$\cdots$，$v_n \in V$ に対し，

$$F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1F(v_1) + \cdots + c_nF(v_n)$$

が成り立つ．

ポイント：$F(v_1)$，$\cdots$，$F(v_n)$ が直交系 $\Longrightarrow$ $F(v_1)$，$\cdots$，$F(v_n)$ は一次独立

V，V' を n 次元の内積空間とし，
$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底，$\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$ を V' の基底とする．
任意の実数 c_1，$\cdots$，c_n に対し，
$F(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1F(v_1) + \cdots + c_nF(v_n)$ をみたすならば，
$F : V \to V'$ は線型写像である．

(続き)　(c) より，F は線型写像である．このとき，$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の正規直交基底とすると，

$\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$ は V' の正規直交基底である．
$\Longleftrightarrow$ F は計量同型写像

である．(a) より，F は計量同型写像であることが示せた．