

問題 1.2 2. つぎの関数は、 $x = 0$ で連続かどうか答えよ.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

(解答) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$, $f(0) = 1$ より, $f(x)$ は $x = 0$ で不連続である.

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

(解答) $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ なので, $|2x \sin \frac{1}{x}| \leq |2x|$ が成り立つ. $\lim_{x \rightarrow 0} |2x| = 0$ なので, はさみうちの原理より, $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$ である.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$, $f(0) = 1$ より, $f(x)$ は $x = 0$ で不連続である.

ポイント : $f(x)$ が $x = 0$ で連続 $\iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$