問題 3.1　3.　つぎの関数 $z = f(x,\ y)$ の原点における連続性を調べよ．

(1)　$z = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & ((x,\ y) \neq (0,\ 0)) \\ 0 & ((x,\ y) \neq (0,\ 0)) \end{cases}$

(解答)　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおく．$(x,\ y) \to (0,\ 0)$ ならば，$r \to 0$ となるので，

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta + r^3\sin\theta}{r^2}$$
$$= \lim_{r\to 0} r(\cos\theta + \sin\theta) = 0 = f(0,\ 0)$$

である．よって，$f(x,\ y)$ は，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ において連続である．

ポイント：$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，
$(x,\ y) \to (0,\ 0)$ ならば，$r \to 0$ である．

$f(x,\ y)$ は，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ において連続 $\iff \displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = f(0,\ 0)$

(2)　$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + 2y^2} & ((x,\ y) \neq (0,\ 0)) \\ 0 & ((x,\ y) \neq (0,\ 0)) \end{cases}$

(解答)　直線 $y = kx\ (k \neq 0)$ に沿って $(x,\ y)$ を原点に近づけると，

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = \lim_{x\to 0} f(x,\ kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + k^2x^2}{x^2 + 2k^2x^2} = \frac{1 + k^2}{1 + 2k^2}$$

となるので，この値は k の値によって異なる．よって，$f(x,\ y)$ は，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ において不連続である．

ポイント：直線 $y = kx\ (k \neq 0)$ に沿って $(x,\ y)$ を原点に近づけるとき，
$\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = \lim_{x\to 0} f(x,\ kx)$ の値が k の値によって異なるならば，
$f(x,\ y)$ は，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ において不連続．