問題 4.1　3.　$f(x)$ が連続であるとき，つぎの関数の微分を f を用いて表せ．

(1)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x}^{x+1} f(2t)\ dt$

(解答)　$f(2x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと，

$$\int_{-x}^{x+1} f(2t)\ dt = \Big[F(t)\Big]_{-x}^{x+1} = F(x+1) - F(-x)$$

となるので，

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x+1} f(2t)\ dt = \frac{d}{dx}\{F(x+1) - F(-x)\} = f(2x+2) + f(-2x)$$

(2)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x}^{2x} tf(t^2)\ dt$

(解答)　$xf(x^2)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと，

$$\int_{x}^{2x} tf(t^2)\ dt = \Big[F(t)\Big]_{x}^{2x} = F(2x) - F(x)$$

となるので，

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{2x} tf(t^2)\ dt = \frac{d}{dx}\{F(2x) - F(x)\}$$
$$= 2\cdot 2xf(4x^2) - xf(x^2) = 4xf(4x^2) - xf(x^2)$$

ポイント：$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(g_1(x))g_2(x)\ dx$ のような問題を解くには，
$f(g_1(x))g_2(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくとよい．

$$\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(g_1(x))g_2(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_{h_1(x)}^{h_2(x)} = F(h_2(x)) - F(h_1(x))$$

$$\frac{d}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(g_1(x))g_2(x)\ dx = \frac{d}{dx}\{F(h_2(x)) - F(h_1(x))\}$$

$$= f(g_1(h_2(x)))g_2(h_2(x))\cdot h_2(x)' - f(g_1(h_1(x)))g_2(h_1(x))\cdot h_1(x)'$$