問題 3.5 2　次の等式を示せ.

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = -(x-a)(y-b)(z-c)$$

(解答) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-x & a-x & a-x \\ 0 & y-x & b-x & b-x \\ 0 & y-x & z-x & c-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-x & a-x & a-x \\ y-x & b-x & b-x \\ y-x & z-x & c-x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & b-x & b-x \\ y-x & z-x & c-x \end{vmatrix} = (a-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-y & b-y \\ 0 & z-y & c-y \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)\begin{vmatrix} b-y & b-y \\ z-y & c-y \end{vmatrix} = (a-x)(b-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z-y & c-y \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c-z \end{vmatrix} = (a-x)(b-y)(c-z)$$

$$= -(x-a)(y-b)(z-c)$$

ポイント：第1行を k 倍して，第2行から第4行に加えても，行列式の値は変わらない.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-x & a-x & a-x \\ 0 & y-x & b-x & b-x \\ 0 & y-x & z-x & c-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-x & a-x & a-x \\ y-x & b-x & b-x \\ y-x & z-x & c-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-y & b-y \\ 0 & z-y & c-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-y & b-y \\ z-y & c-y \end{vmatrix}$$

問題 3.5 2　次の等式を示せ.

(2) $$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$$

(解答) $$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & a & b \\ b & b & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a & a \\ a & b & b & b \\ a & a & a & b \\ b & b & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a & a+b \\ a+b & 2b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & b-a \\ a-b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \{4ab - (a+b)^2\} \cdot (a-b)^2 = -(a-b)^4$$

ポイント：第 3 列と第 4 列を入れかえるとき，行列式を (-1) 倍する.
第 1 行と第 2 行をを入れかえるとき，行列式を (-1) 倍する.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

問題 3.5 2　次の等式を示せ.

(3) $$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$$

(n 次)

(解答)　$$d_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$ とおく.

$d_n = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$ が成り立つことを帰納法で示す.

(i)　$n=1$ のとき，$d_1 = |1+x^2| = 1+x^2$ となるので，成り立つ.

$n=2$ のとき，$d_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 1+x^2+x^4$

となるので，成り立つ.

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき，$d_n = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$ が成り立つとすると，

$n=k+2$ のとき，
$$\begin{aligned} d_{k+2} &= (1+x^2)d_{k+1} - x^2 d_k \\ &= (1+x^2)(1+x^2+\cdots+x^{2k}+x^{2(k+1)}) \\ &\quad -x^2(1+x^2+\cdots+x^{2k}) \\ &= (1+x^2+\cdots+x^{2k}) + (1+x^2)x^{2(k+1)} = d_{k+2} \end{aligned}$$

となるので，$n=k+2$ のときも成り立つ.

(i), (ii) より，題意は示した.

ポイント：$\begin{cases} n=1,\ 2 \text{ のとき, 命題 } P_n \text{が真} \\ n=k,\ k+1 \text{ のとき, 命題 } P_n \text{が真} \Longrightarrow n=k+2 \text{ のとき, 命題 } P_n \text{が真} \end{cases}$

$\Longrightarrow$ すべての n に対し, 命題 P_n が真

問題 3.5 2　次の等式を示せ.

(4) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$$

(解答)　$a = 0$ のとき, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{vmatrix} = (-be + cd)^2$

より, $a = 0$ のとき, $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$ が成り立つ.

$a \neq 0$ のとき,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ -1 & 0 & \frac{d}{a} & \frac{e}{a} \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ -1 & 0 & \frac{d}{a} & \frac{e}{a} \\ 0 & -d & -\frac{bd}{a} & \frac{af-be}{a} \\ 0 & -e & \frac{-af-cd}{a} & -\frac{ce}{a} \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ -1 & 0 & \frac{d}{a} & \frac{e}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{af-be+cd}{a} \\ 0 & 0 & \frac{-af+be-cd}{a} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{af-be+cd}{a} \\ \frac{-af+be-cd}{a} & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$$

となるので, 題意は示した.

ポイント : $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D|$