

問題 4.3 3. 行列 A からいくつかの行といくつかの列を取り除いて得られる行列を A の小行列という。行列 A に対し次を示せ。

$\text{rank}(A) = r \iff A$ の小行列のうち行列式が 0 でないものの最大次数は r である。

(解答) $\text{rank}(A) = r$ とする。このとき、 A の列ベクトルの 1 次独立な最大個数が r 個である。よって、 A の小行列が k ($k \geq r+1$) 次正方行列のとき、 k 個の列ベクトルは 1 次独立ではないので、行列式は 0 になる。

また、行列 A から 1 次独立な r 個の列ベクトル以外を取り除き、次にその行列の行ベクトルのうち 1 次独立な r 個の行ベクトル以外を取り除いてできる A の小行列は r 次正則行列となり、行列式は 0 でない。

よって、 A の小行列のうち行列式が 0 でないものの最大次数は r である。

$\text{rank}(A) \neq r$ とする。このとき、 $\text{rank}(A) = k$ ($k \neq r$) となるので、 A の小行列のうち行列式が 0 でないものの最大次数は k である。

よって、 A の小行列のうち行列式が 0 でないものの最大次数は r ではない。

以上により、題意は示した。

ポイント： $\text{rank}(A) = A$ の列ベクトルの 1 次独立な最大個数
= A の行ベクトルの 1 次独立な最大個数

「 $P \iff Q$ 」を示すためには、

「 $P \implies Q$ 」と「 $\bar{P} \implies \bar{Q}$ 」を示せばよい。(\bar{P} は P の否定である.)