2.3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定義するとき，その収束・発散を調べよ．

（i） $a_1 > 0$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}({a_n}^2 - 2a_n + 3)$，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$.

(解答)　$a_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)^2$ と変形できる．

（I） $a_1 = 1$ のとき

すべての $n \geqq 1$ に対し，$a_n = 1$ となるので，数列 $\{a_n\}$ は収束する．

（II） $a_1 \neq 1$ のとき

すべての $n \geqq 1$ に対し，$a_n \neq 1$ となるので，

$$\log_2 |a_{n+1} - 1| = 2\log_2 |a_n - 1| - 1$$
$$\log_2 |a_{n+1} - 1| - 1 = 2(\log_2 |a_n - 1| - 1)$$
$$\log_2 |a_n - 1| - 1 = 2^{n-1}(\log_2 |a_1 - 1| - 1)$$
$$|a_n - 1| = 2^{2^{n-1}(\log_2 |a_1 - 1| - 1) + 1}$$

が成り立つ．よって，

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ が収束} \iff \log_2 |a_1 - 1| - 1 \leqq 0 \ \ (a_1 \neq 1)$$
$$\iff 0 < a_1 \leqq 3 \ \ (a_1 \neq 1)$$

（I），（II）より，$0 < a_1 \leqq 3$ ならば，数列 $\{a_n\}$ は収束，$a_1 > 3$ ならば，数列 $\{a_n\}$ は発散する．

ポイント：本問題は,「$a_n \neq 1$ ならば，$a_{n+1} \neq 1$」となるので，

$a_1 \neq 1$ ならば，すべての $n \geqq 1$ に対し，$a_n \neq 1$

$c > 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$，$p$，$q$ は定数のとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c^{p \cdot b_n + q}$ が有限値になる．$\iff p \leqq 0$

a_1 に条件が無い場合，$\begin{cases} -1 \leqq a_1 \leqq 3 \text{ ならば, 数列 } \{a_n\} \text{ は収束,} \\ a_1 < -1 \text{ または } a_1 > 3 \text{ ならば, 数列 } \{a_n\} \text{ は発散} \end{cases}$

2.3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定義するとき，その収束・発散を調べよ．

（ⅱ） $a_1 > 0$，$a_{n+1} = a_1 + \dfrac{1}{a_n}$，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$.

(解答) $a_{n+1} = a_1 + \dfrac{1}{a_n}$ ……① の a_{n+1}，a_n に α を代入した式

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha}$$

の解を求めると，

$$\alpha^2 - a_1\alpha - 1 = 0 \iff \alpha = \frac{a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 + 4}}{2}$$

である．$p = \dfrac{a_1 - \sqrt{{a_1}^2+4}}{2}$，$q = \dfrac{a_1 + \sqrt{{a_1}^2+4}}{2}$ とおくと，

$$p = a_1 + \frac{1}{p} \ \cdots\cdots ②,\quad q = a_1 + \frac{1}{q} \ \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．① − ②より，

$$a_{n+1} - p = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{p} = -\frac{a_n - p}{pa_n}$$

が成り立ち，① − ③より，

$$a_{n+1} - q = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{q} = -\frac{a_n - q}{qa_n}$$

が成り立つ．$p < 0$ であり，すべての $n \geqq 1$ に対し，$a_n > 0$ となるので，$a_n - p \neq 0$ である．よって，

$$\frac{a_{n+1} - q}{a_{n+1} - p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n - q}{a_n - p}$$

$$\frac{a_n - q}{a_n - p} = \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \cdot \frac{a_1 - q}{a_1 - p}$$

$$a_n = \frac{q - p \cdot \left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \cdot \frac{a_1 - q}{a_1 - p}\right\}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \cdot \frac{a_1 - q}{a_1 - p}}$$

となる．$a_1 > 0$ より，$\left|\dfrac{p}{q}\right| < 1$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = q$ である．よって，数列 $\{a_n\}$ は，収束する．

ポイント：$\alpha = x + \dfrac{y}{\alpha}$ が，異なる 2 つの実数解 p，q をもつとき，
$a_{n+1} = x + \dfrac{y}{a_n}$ の形の漸化式を解くためには，
$\dfrac{a_{n+1} - q}{a_{n+1} - p} = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{a_n - q}{a_n - p}$ を導いて，$\dfrac{a_n - q}{a_n - p}$ を求めればよい．

$a_1 < 0$ の場合，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = p$ であり，数列 $\{a_n\}$ は，収束する．