問 17　$f(x) = \log(1+x^2)$ のとき，$f^n(0)$ を求めよ．

(解答)　$-1 < x < 1$ のとき，

$$f^1(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2x(1-(-x^2)^m)}{1-(-x^2)}$$
$$= 2x + 2x\cdot(-x^2) + 2x\cdot(-x^2)^2 + \cdots$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} 2\cdot(-1)^{m-1}x^{2m-1}$$

である．また，

$$f^1(x) = f^1(0) + \frac{f^2(0)}{1!}x + \frac{f^3(0)}{2!}x^2 + \frac{f^4(0)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

となるので，n が奇数のとき $f^n(0) = 0$ であり，n が偶数のとき，$n = 2m$ とすると

$$\frac{f^n(0)}{(n-1)!}x^{n-1} = 2\cdot(-1)^{m-1}x^{2m-1}$$

が成り立つ．よって，

$$f^n(0) = 2\cdot(-1)^{\frac{n}{2}-1}\cdot(n-1)!$$

となる．よって，

$$f^n(0) = \begin{cases} 0 & (n\text{ が奇数}) \\ 2\cdot(-1)^{\frac{n}{2}-1}\cdot(n-1)! & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

ポイント：$-1 < r < 1$ のとき，$\dfrac{a}{1-r} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$$g(x) = g(0) + \frac{g^1(0)}{1!}x + \frac{g^2(0)}{2!}x^2 + \frac{g^3(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n(0)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{n-1}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

本問題は，$g(x) = f^1(x)$ のときである．