2 次の行列 A に対し，A^2，A^3，A^n を計算せよ．

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(解答) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 3A$$

この計算より，A^n を求める．

(i) n が偶数のとき，すなわち $n = 2k$ と表されるとき，

$$A^{2k} = (A^2)^{k-1}A^2 = 3^{k-1}A^2 = 3^{\frac{n}{2}-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) n が奇数のとき，すなわち $n = 2k+1$ と表されるとき，

$$A^{2k+1} = (A^2)^kA = 3^kA = 3^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ポイント：$A^2A = 3A$ より，$(A^2)^kA = 3^kA$ である．

また，$A^2A^2 = 3A^2$ なので，$(A^2)^{k-1}A^2 = 3^{k-1}A^2$ である．

同様に，$(A^2)^kA = 3^kA$ である．

$$n = 2k \iff k = \frac{n}{2}$$
$$n = 2k+1 \iff k = \frac{n-1}{2}$$