3 次の行列 A, B に対し，$(AB)^n$ を計算せよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(解答) $BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$ となるので，

$$(AB)^n = A(BA)^{n-1}B = A(0B) = 0(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(解答) $BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -2$,

$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となるので，

$$\begin{aligned} (AB)^n &= A(BA)^{n-1}B = A\{(-2)^{n-1}B\} = (-2)^{n-1}AB \\ &= (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ポイント：BA が定数になるので，$(AB)^n = A(BA)^{n-1}B$ と変形すると，
計算が楽である．