30 空間内の4点A，B，C，Dが同一平面にないとする．B，C，Dを通る平面とAとの距離が

$$\frac{|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|}$$

となることを示せ.

(解答)　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ の張る平行6面体の体積が $|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}]|$ に等しいので，点A，B，C，Dを頂点とする4面体の体積は $\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}]|$ である.

また，三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ より，B，C，D を通る平面と A との距離を d とおくと，点 A，B，C，D を頂点とする 4 面体の体積は $\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\right\}\cdot d=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\cdot d$ である.

$$\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}]|=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\cdot d$$

$$d=\frac{|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|}$$

となるので，題意は示した.

ポイント：点A，B，C，Dを頂点とする4面体の体積は,
$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ の張る平行6面体の体積の $\frac{1}{6}$ 倍である.

点A，B，C，Dを頂点とする4面体の底面を三角形ABCとしたとき,
高さはB，C，Dを通る平面とAとの距離である.