34 空間における次の球面の座標の方程式を求めよ．

(1) 2 点 $(2,\ 1,\ -2)$，$(1,\ -1,\ 2)$ を直径とする球面

(解答) 中心は，$\left(\dfrac{2+1}{2},\ \dfrac{1+(-1)}{2},\ \dfrac{(-2)+2}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$ であり，

半径は $\sqrt{\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2+(1-0)^2+(-2-0)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ である．

よって，求める円の座標の方程式は，

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2$$

$$x^2+y^2+z^2-3x-3=0$$

である．

(2) 4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(-1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ -1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ -1)$ を通る球面

(解答) 円の座標の方程式は，$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ $\cdots$ ① で表される．

①に $(0,\ 0,\ 0)$，$(-1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ -1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ -1)$ を代入して整理すると，

$$\begin{cases} d=0 \\ -a+b+c+d=-3 \\ a-b+c+d=-3 \\ a+b-c+d=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-3 \\ b=-3 \\ c=-3 \\ d=0 \end{cases}$$

よって，求める円の座標の方程式は，

$$x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z=0$$

である．

ポイント：中心 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，半径 r の球の座標の方程式は，

$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=r^2$ である．

球の座標の方程式は，$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ で表される．

34　空間における次の球面の座標の方程式を求めよ．

(3)　球面 $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$ と平面 $x+y+z+1=0$ の交円および点 $(1,\ -1,\ 0)$ を通る球面

(解答)　球面 $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$ と平面 $x+y+z+1=0$ の交円および点 $(1,\ -1,\ 0)$ を通る球面は，

$$\{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-4\}+k\{x+y+z+1\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

で表される．①に $(1,\ -1,\ 0)$ を代入して整理すると，

$$10+k=0 \iff k=-10$$

となるので，①に代入して整理すると，求める円の座標の方程式は，

$$x^2+y^2+z^2-6x-12y-12z-8=0$$

である．

ポイント：球面 $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=r^2$ と
平面 $bx+cy+dz+e=0$ が交円を持つとき，
交円を含む球面の座標の方程式は，

$$\{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-r^2\}+k\{bx+cy+dz+e\}=0$$

で表せる．