35　2 球面

$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4,\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$$

の交円の中心と半径を求めよ.

(解答)　球面 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ と球面 $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ の交円を含む平面の方程式は,

$$\{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2-4\}+k\{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-9\}=0 \quad \cdots ①$$

に $k=-1$ を代入して得られる 1 次方程式である. ①に $k=-1$ を代入して整理すると,

$$2x+2y+z=2$$

となる. 球面 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ の中心 $(1,\ -1,\ 0)$ と $2x+2y+z=2$ の距離は

$$\frac{|2\cdot 1+2\cdot(-1)+0-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{3}$$

であり, 球面 $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ の中心 $(3,\ 1,\ 1)$ と $2x+2y+z=2$ の距離は

$$\frac{|2\cdot 3+2\cdot 1+1-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{7}{3}$$

なので, 交円の中心は, 2 点 $(1,\ -1,\ 0)$, $(3,\ 1,\ 1)$ を結んだ線分を $2:7$ に内分する点である. よって, 交円の中心は,

$$\left(\frac{1\cdot 7+3\cdot 2}{2+7},\ \frac{(-1)\cdot 7+1\cdot 2}{2+7},\ \frac{0\cdot 7+1\cdot 2}{2+7}\right)=\left(\frac{13}{9},\ -\frac{5}{9},\ \frac{2}{9}\right)$$

である. また, 球面 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ の半径が 2 であり,
球面 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ の中心 $(1,\ -1,\ 0)$ と $2x+2y+z=2$ の距離が $\frac{2}{3}$ なので, 三平方の定理より, 交円の半径は,

$$\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

である.

ポイント : 球面 $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=r^2$ と球面 $(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2=R^2$ の交円を含む平面の方程式は,

$$\{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-r^2\}$$
$$+k\{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2-R^2\}=0 \quad \cdots ①$$

に $k=-1$ を代入して得られる 1 次方程式である.

中心が点 A, 半径が r_1 の球面と, 中心が点 B, 半径が r_2 の球面について,
点 A, B と, 2 球面の交円を含む平面の距離を d_1, d_2 としたとき,
交円の中心は, 線分 AB を $d_1:d_2$ に内分する点であり,
交円の半径は, $\sqrt{{r_1}^2-{d_1}^2}$ である. $\left(\sqrt{{r_2}^2-{d_2}^2}\text{でも良い.}\right)$