問題 9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答えよ．

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ．

(解答) 固有方程式 $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ を解くと，$\lambda = -2,\ 3$ となるので，固有値は -2 と -3 である．

固有値が -2 のとき，$Av = -2v\ (v \neq 0)$ となる v を 1 つ求める．

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} v = 0 \text{ より，} v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求まる．

固有値が 3 のとき，$Av = 3v\ (v \neq 0)$ となる v を 1 つ求める．

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} v = 0 \text{ より，} v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まる．

よって，固有値は -2，3 で，対応する固有ベクトルはそれぞれ $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ である．

ポイント：2×2 行列 A に対し，

$Av = \lambda v$，$v \neq 0$ を満たす数 λ，2 次元ベクトル v が存在するとき，
λ を固有値，v を (固有値 λ に対応する) 固有ベクトルという．

λ が，行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の固有値である．

$\Longleftrightarrow$ λ が，固有方程式 $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$ を満たす．

問題 9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答えよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる P を求めよ.

(解答) (1) より,

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である. よって,

$$A \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. ここで, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと, P は正則行列なので, 逆行列 P^{-1} が存在し,

$$AP = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \iff P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. よって, 題意を満たす P の 1 つは, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ である.

ポイント : A を 2×2 行列, 2 次元ベクトル v_1, v_2 に対し, $P = (v_1 \ v_2)$ とすると,

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \ Av_2 = \lambda_2 v_2 \iff AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(3) A^n を計算せよ.

(解答) (2) より, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とすると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となるので,

$$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \times (-2)^n + 2 \times 3^n & (-2)^{n+1} + 2 \times 3^n \\ -3 \times (-2)^n + 2 \times 3^{n+1} & -(-2)^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

ポイント : 2×2 行列 A, 2×2 正則行列 P に対し, $P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n$