**13** $F_0(x)=\log x$，$F_n(x)=\displaystyle\int F_{n-1}(x)\,dx \quad (n\in\mathbb{N})$ とするとき，$F_n(x)$ を求めよ．
(ただし，積分定数は省略する．)

(解答) $F_0(x)=\log x$，$F_1(x)=\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x$，

$$F_2(x)=\int x\log x - x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{3}{4}x^2$$

より，$F_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}\log x - a_n x^n$ の形になることが推測できる．この予想が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する．

(ｉ) $n=0$ のとき，$a_0=0$ とすると，$F_0(x)=\dfrac{x^0}{0!}\log x - a_0x^0$ の形になる．

(ii) $n=k$ のとき，$F_k(x)=\dfrac{x^k}{k!}\log x - a_kx^k$ の形になると仮定すると，
$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
F_{k+1}(x)&=\int \frac{x^k}{k!}\log x - a_kx^k\,dx\\
&=\left(\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\log x-\int\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)-a_k\frac{x^{k+1}}{k+1}\\
&=\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\log x-\left\{\frac{1}{(k+1)\cdot(k+1)!}+\frac{a_k}{k+1}\right\}x^{k+1}
\end{aligned}$$

となるので，$a_{k+1}=\dfrac{1}{(k+1)\cdot(k+1)!}+\dfrac{a_k}{k+1}$ とおくと，$n=k+1$ のときも，$F_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}\log x - a_nx^n$ の形になる．

(ｉ)，(ii) より，$n\geqq 0$ の任意の $n$ に対し，$F_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}\log x - a_nx^n$ と表せる．
次に，$a_n$ を求める．数列 $\{a_n\}$ は，以下の漸化式をみたす．

$$a_0=0,\quad a_{k+1}=\frac{1}{(k+1)\cdot(k+1)!}+\frac{a_k}{k+1}\quad (k\geqq 0)$$

このとき，$(k+1)!a_{k+1}=k!a_k+\dfrac{1}{(k+1)}$ より，$n\geqq 1$ のとき，

$$n!a_n=0!a_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$a_n=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

となる．よって，$n\geqq 1$ のとき，$F_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}\log x-\dfrac{x^n}{n!}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

ポイント：$b_{k+1}=b_k+c_k\ (k\geqq 0)$，$b_0=b$ のとき，

$$b_n=\begin{cases} b & (n=0\ のとき)\\ b+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}c_k & (n\geqq 1\ のとき)\end{cases}$$