13. 原点に関して対称な区間で定義された関数 $f(x)$ は，$f(x)=g(x)+h(x)$，$g(x)$ 偶関数，$h(x)$ 奇関数の形に一意的に表されることを証明せよ．

次に $[-\pi,\ \pi]$ で定義された関数 $f(x)=2\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$，$=0\ (-\pi\leqq x\leqq 0)$ に対して，$g(x)$，$h(x)$ を求め，なるべく簡単な式で表せ．

(解答)　原点に関して対称な区間内の x に対し，$g(x)$ は偶関数なので，$g(x)=g(-x)$ が成り立ち，$h(x)$ は奇関数なので，$h(x)=-h(-x)$ が成り立つ．

よって，区間内の x に対し，

$$f(x)=g(x)+h(x) \quad \cdots\cdots ①$$

$$f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x) \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．①，②より，

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

である．よって，$f(x)=g(x)+h(x)$ の形に一意的に表されることが示せた．

次に，区間 $[-\pi,\ \pi]$ で定義された関数 $f(x)=\begin{cases}2\sin x & (0\leqq x\leqq\pi)\\ 0 & (-\pi\leqq x\leqq 0)\end{cases}$ に対し，

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\begin{cases}\frac{2\sin x+0}{2} & (0\leqq x\leqq\pi)\\ \frac{0+2\sin(-x)}{2} & (-\pi\leqq x\leqq 0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin x & (0\leqq x\leqq\pi)\\ -\sin x & (-\pi\leqq x\leqq 0)\end{cases}=|\sin x|$$

であり，

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\begin{cases}\frac{2\sin x-0}{2} & (0\leqq x\leqq\pi)\\ \frac{0-2\sin(-x)}{2} & (-\pi\leqq x\leqq 0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin x & (0\leqq x\leqq\pi)\\ \sin x & (-\pi\leqq x\leqq 0)\end{cases}=\sin x$$

である．

ポイント：原点に関して対称な区間内の x に対し，

$g(x)$ は偶関数 $\Longleftrightarrow g(x)=g(-x)$

$h(x)$ は偶関数 $\Longleftrightarrow h(x)=-h(-x)$

$\sin(-x)=-\sin x$

区間 $[-\pi,\ \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ に対し，$|f(x)|=\begin{cases}f(x) & (0\leqq x\leqq\pi)\\ -f(x) & (-\pi\leqq x\leqq 0)\end{cases}$