問題 5.1

1.　累次積分を計算せよ.

(1)
$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} xe^y\,dy = \int_0^2 \Big[xe^y\Big]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 (xe^{2x} - xe^{x^2})dx$$
$$= \left[x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{2x}}{2}dx - \frac{1}{2}\int_0^2 (2x)e^{x^2}dx$$
$$= 2e^4 - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\Big[e^{x^2}\Big]_0^2 = \frac{e^4}{4} + \frac{3}{4}$$

ポイント：$\displaystyle\int_{x^2}^{2x} xe^y\,dy$ は，x を固定して，xe^y を x^2 から $2x$ までの y に関する積分を考える.

(2)
$$\int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin xy\,dx = \int_0^1 \Big[-\cos xy\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^1 \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}y\right) dy$$
$$= \left[y - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}y\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{\pi}$$

ポイント：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin xy\,dx$ は，y を固定して，$y\sin xy$ を 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ までの x に関する積分を考える.

問題 5.1

2.　積分を計算せよ.

(6) $\displaystyle\iint_D (2x-y)dxdy \quad D: x \leqq y \leqq 2x,\ x+y \leqq 3$

(解答)
$$\iint_D (2x-y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (2x-y)dy + \int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_x^{3-x} (2x-y)dy$$
$$= \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=2x} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \left[2xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=3-x} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \left(-4x^2 + 9x - \frac{9}{2}\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8}$$

ポイント：$x \leqq 2x,\ 2x \leqq 3-x \iff 0 \leqq x \leqq 1$,

$x \leqq 3-x,\ 3-x \leqq 2x \iff 1 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ なので,

$$D = \{(x,\ y) | x \leqq y \leqq 2x,\ x+y \leqq 3\}$$
$$= \left\{(x,\ y) | x \leqq y \leqq 2x\ (0 \leqq x \leqq 1),\ x \leqq y \leqq 3-x \left(1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)\right\}$$

問題 5.1

2.　積分を計算せよ.

(7) $\displaystyle\iiint_D zdxdydz \quad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x,\ 0 \leqq z \leqq 1-x-y$

(解答)

$$\begin{aligned}\iiint_D zdxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} zdz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \left[-\frac{(1-x)^4}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{24} \\ &= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

ポイント：z から先に積分する.

問題 5.1

2.　積分を計算せよ.

(8) $\displaystyle\iiint_D ydxdydz \quad x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+2y+3z \leqq 6$

(解答)

$$\begin{aligned}\iiint_D ydxdydz &= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{3}} dz \int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} ydy = \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{3}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{z=\frac{6-x-3z}{2}} dz \\ &= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{3}} \frac{(6-x-3z)^2}{8} dz = \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{(6-x-3z)^3}{24}\right]_{z=0}^{z=\frac{6-x}{3}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(6-x)^3}{72} dx = \left[-\frac{(6-x)^4}{288}\right]_0^6 = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

ポイント：y から先に積分する.

問題 5.1

3.　積分の順序を変更せよ.

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,\ y)\ dy$

(解答)　$\{(x,\ y) | -2 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq -x+2\}$

$= \{(x,\ y) | x^2 \leqq y \leqq -x+2\}$

$= \{(x,\ y) | -\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y},\ x \leqq 2-y\}$ なので,

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,\ y)\ dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\ dy + \int_{1}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,\ y)\ dy$$

ポイント：$-\sqrt{y} \leqq \sqrt{y},\ \sqrt{y} \leqq 2-y \Longleftrightarrow 0 \leqq y \leqq 1$,

$-\sqrt{y} \leqq 2-y,\ 2-y \leqq \sqrt{y} \Longleftrightarrow 1 \leqq y \leqq 4$ なので,

$D = \{(x,\ y) | -\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y},\ x \leqq 2-y\}$

$= \{(x,\ y) | -\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}\ (0 \leqq y \leqq 1),\ -\sqrt{y} \leqq x \leqq 2-y\ (1 \leqq y \leqq 4)\}$

問題 5.1

3.　積分の順序を変更せよ.

(4) $\displaystyle\int_{0}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\ dx$

(解答)　$\{(x,\ y) | 0 \leqq y \leqq 4,\ y-2 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$

$= \{(x,\ y) | 0 \leqq y,\ y-2 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$

$= \{(x,\ y) | y \geqq x^2\ (x \geqq 0),\ y \geqq 0,\ y \leqq x+2\}$ なので,

$$\int_{0}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\ dx = \int_{-2}^{0} dx \int_{0}^{x+2} f(x,\ y)\ dy + \int_{0}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,\ y)\ dy$$

ポイント：$D = \{(x,\ y) | y \geqq x^2\ (x \geqq 0),\ y \geqq 0,\ y \leqq x+2\}$

$= \{(x,\ y) | y \geqq x^2\ (x \geqq 0),\ y \geqq 0,\ y \leqq x+2,\ -2 \leqq x \leqq 2\}$

$= \{(x,\ y) | x^2 \leqq y \leqq x+2\ (x \geqq 0),\ 0 \leqq y \leqq x+2\ (x \leqq 0),\ -2 \leqq x \leqq 2\}$

$= \{(x,\ y) | 0 \leqq y \leqq x+2\ (-2 \leqq x \leqq 0),\ x^2 \leqq y \leqq x+2\ (0 \leqq x \leqq 2)\}$