問題 5.2

1. 極座標を用いて，つぎの積分の値を計算せよ．

(3) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq x$

(解答) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおく．

D は中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の内部であるから

$r,\ \theta$ の範囲は $0 \leqq r \leqq \cos\theta,\ -\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となる．この領域を E とすると

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_E r\cos\theta \cdot r\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^2\cos\theta\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}r^3\cos\theta\right]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

ポイント：領域 D : $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ は，

中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の内部である．

問題 5.2

2. 適当な変数変換を用いて，つぎの積分の値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy \quad D: 0 \leqq x+y \leqq 2,\ 0 \leqq x-y \leqq 2$

(解答) $\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases}$ とおく．すなわち，$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

$E = \{(u,\ v) | 0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq u \leqq 2\}$ と D の点は 1 対 1 対応する．また

$\left|\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}$ である．よって，

$$\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy = \iint_E ve^u\cdot\frac{1}{2}\,dudv = \int_0^2 du \int_0^2 \frac{v}{2}e^u\,dv = \int_0^2 \left[\frac{v^2}{4}e^u\right]_{v=0}^{v=2} du$$

$$= \int_0^2 e^u\,du = \Big[e^u\Big]_0^2 = e^2 - 1$$

ポイント：$\left|\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| = |x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u|$ を計算する．

問題 5.2

2.　適当な変数変換を用いて，つぎの積分の値を計算せよ．

(2)　$\displaystyle\iint_D x^2 dxdy \quad D: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1, \quad a,\ b > 1$

(解答)　$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = u \\ \dfrac{y}{b} = v \end{cases}$ とおく．すなわち，$\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}$

$E = \{(u,\ v) | u^2 + v^2 \leqq 1\}$ と D の点は 1 対 1 対応する．また

$\left|\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right| = ab$　である．よって，

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_E a^2u^2 \cdot ab\ dudv$$

ここで，$u = r\cos\theta$，$v = r\sin\theta$ とおく．

r，θ の範囲は $0 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる．この領域を F とすると

$$\iint_E u^2 dudv = \iint_F r^2\cos^2\theta \cdot rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\cos^2\theta dr = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

よって，$\displaystyle\iint_D x^2 dxdy = \frac{\pi a^3 b}{4}$

ポイント：$\left|\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| = |x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u|$ を計算する．

n が偶数のとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n\theta d\theta = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 2\pi$ となる．

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n：\text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n：\text{奇数}) \end{cases}$

問題 5.2

2.　適当な変数変換を用いて，つぎの積分の値を計算せよ．

(3)　$\displaystyle\iint_D (x+y)^4 dxdy \quad D: x^2+2xy+2y^2 \leqq 1$

(解答)　$\begin{cases} x+y=u \\ y=v \end{cases}$ とおく．すなわち，$\begin{cases} x=u-v \\ y=v \end{cases}$

$E=\{(u,\ v) | u^2+v^2 \leqq 1\}$ と D の点は 1 対 1 対応する．また

$\left|\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$　である．よって，

$$\iint_D (x+y)^4 dxdy = \iint_E u^4 \cdot 1\ dudv$$

ここで，$u=r\cos\theta$，$v=r\sin\theta$ とおく．

r，θ の範囲は $0 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる．この領域を F とすると

$$\iint_E u^4 dudv = \iint_F r^4\cos^4\theta \cdot rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^5\cos^4\theta dr = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{6}r^6\cos^4\theta\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{6}\cos^4\theta d\theta = \frac{1}{6}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{8}$$

よって，$\displaystyle\iint_D (x+y)^4 dxdy = \frac{\pi}{8}$

ポイント：$D: (x+y^2)+y^2 \leqq 1$ なので，$\begin{cases} x+y=u \\ y=v \end{cases}$ とおく．

$\left|\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| = |x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u|$ を計算する．

n が偶数のとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 2\pi$ となる．

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n: \text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$