問題 4.2

1.　つぎの不定積分を求めよ．(以下，積分定数を省略する．)

(1)
$$\int \frac{x^2}{x^2-x-6}dx = \int \left(1 + \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= x + \frac{9}{5}\log|x-3| - \frac{4}{5}\log|x+2|$$

ポイント：$\dfrac{x^2}{x^2-x-6} = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x+2}$ とおき，両辺を比べることで，$\dfrac{x^2}{x^2-x-6}$ の部分分数展開を求める．

(2)
$$\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \mathrm{Tan}^{-1}x$$

ポイント：$\dfrac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ とおき，両辺を比べることで，$\dfrac{2}{(x-1)(x^2+1)}$ の部分分数展開を求める．

(3)
$$\int \frac{x-1}{(2-x)^3}dx = \int \left(-\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)^3}\right)dx$$
$$= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2(x-2)^2}$$

ポイント：$\dfrac{x-1}{(2-x)^3} = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{(x-2)^3}$ とおき，両辺を比べることで，$\dfrac{x-1}{(2-x)^3}$ の部分分数展開を求める．

(8)
$$\int \frac{1+\cos x}{(1+\sin x)^2}dx = \int \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^4}dx = \int 4\cdot\frac{1}{(1+\tan\frac{x}{2})^4}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$
$$= \int 4\cdot\frac{1}{(1+u)^4}\frac{du}{dx}dx \qquad \left(u = \tan\frac{x}{2},\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)$$
$$= \frac{-4}{3(1+u)^3} = \frac{-4}{3\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^3}$$

ポイント：$\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$，$\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ なので，
$$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2},\quad 1+\sin x = 1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2$$

問題 4.2

2. つぎの定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{4!!}{5!!} = \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1} = \frac{8}{15}$

ポイント：n が奇数のとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}$ となる.

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$

(2) $\displaystyle J_n = \int_0^{\pi} \cos^6 x dx$ とおく.

$$\int_0^{\pi} \cos^n x dx = \frac{1}{n}\Big[\cos^{n-1} x \sin x\Big]_0^{\pi} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi} \cos^{n-2} x dx.$$

よって，$\displaystyle J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}\ (n \geqq 2)$ であるから，

$$J_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}J_0 = \frac{5}{16}\int_0^{\pi} dx = \frac{5}{16}\pi$$

また，
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x dx &= -\int_0^{\pi} \cos^6 x(-\sin x)dx \\ &= -\int_1^{-1} u^6 \frac{du}{dx}dx \qquad \left(u = \cos x,\ \frac{du}{dx} = -\sin x\right) \\ &= \int_{-1}^{1} u^6 du = \left[\frac{1}{7}u^7\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{7}\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x(1-\sin x)dx = \frac{5}{16}\pi - \frac{2}{7}$

ポイント：$\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x dx$ と $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x dx$ の値を別々に求める.

$\displaystyle J_n = \int_0^{\pi} \cos^n x dx$ の漸化式を作る.