問題 4.3

1.　つぎの広義積分の値を求めよ.

(4)
$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{2}\int_0^\beta (-2x)e^{-x^2}dx = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{2}\Big[e^{-x^2}\Big]_0^\beta$$
$$= \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-\beta^2}-1) = \frac{1}{2}$$

ポイント：$\displaystyle\int_0^\beta (-2x)e^{-x^2}dx$ の積分は，$u=-x^2$ とおくと求めることができる.
なお，$\dfrac{du}{dx} = -2x$ である.

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ を計算する．$\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ は，$x=0$ で不連続であるから
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[-2\sqrt{-x}\Big]_{-1}^0 + \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 4$$

ポイント：$\dfrac{1}{\sqrt{|x|}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-x}} & (x<0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & (x>0) \end{cases}$ である.

$\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ は，ともに収束する.

(7) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$ を計算する．$\dfrac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$ は，$x=1$ で不連続であるから
$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \Big[\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_0^1 + \Big[\log|x+\sqrt{x^2-1}|\Big]_1^2 = \frac{\pi}{2} + \log(2+\sqrt{3})$$

ポイント：$\dfrac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (-1<x<1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & (x<-1,\ x>1) \end{cases}$ である.

$\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ は，ともに収束する.

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}x \quad (a\neq 0)$ である.

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log|x+\sqrt{x^2+a}| \quad (a\neq 0)$ である.