問題 4.4

1. つぎの曲線の長さを求めよ.

(1) 曲線 $C: y = x^2 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ $l(C)$ を求める.

$$l(C) = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}dx$$
$$= \left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$$

ポイント：$\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\log|x+\sqrt{x^2+a}|) \quad (a \neq 0)$

(2) 曲線 $C: y = \log x \quad (1 \leqq x \leqq a)$ の長さ $l(C)$ を求める.

$$l(C) = \int_1^a \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int_1^a \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int_1^a \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\cdot x\,dx$$

ここで, $\displaystyle I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\cdot x\,dx = \int \frac{u}{u^2-1}\cdot u\,du \qquad \left(u = \sqrt{1+x^2},\ u\frac{du}{dx} = x\right)$

$$= \int 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = u + \frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$
$$= u + \frac{1}{2}\log\left|\frac{(u-1)^2}{u^2-1}\right| = u + \log(u-1) - \frac{1}{2}\log(u^2-1)$$
$$= \sqrt{x^2+1} + \log(\sqrt{x^2+1}-1) - \log x$$

となるので, $\displaystyle l(C) = \left[\sqrt{x^2+1} + \log(\sqrt{x^2+1}-1) - \log x\right]_1^a$

$$= \sqrt{a^2+1} - \sqrt{2} + \log(\sqrt{a^2+1}-1) - \log(\sqrt{2}-1) - \log a$$

ポイント：$\displaystyle I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ を置換積分法 $(u = \sqrt{1+x^2})$ を用いて求める.

(3) 曲線 $C: y = \log\cos x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}\right)$ の長さ $l(C)$ を求める.

$$l(C) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(-\tan x)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-u^2}du \qquad \left(u = \sin x,\ \frac{du}{dx} = \cos x\right)$$
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)du = \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log(\sqrt{2}+1)$$

ポイント：本来は, $\displaystyle\sqrt{1+\tan^2 x} = \left|\frac{1}{\cos x}\right|$ である.

積分区間が $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ なので, $\displaystyle\left|\frac{1}{\cos x}\right| = \frac{1}{\cos x}$ である.

問題 4.4

2.　つぎの曲線の長さを求めよ．

(1)　曲線 $C:\begin{cases} x = t\cos\left(\dfrac{1}{t}\right) \\ x = t\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$　$(1 \leqq t \leqq 2)$ の長さ $l(C)$ を求める．

$$l(C) = \int_1^2 \sqrt{\left\{\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right\}^2 dt}$$
$$= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}dt} = \int_1^2 \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}dt$$
$$= \left[\sqrt{t^2+1} + \log\left(\sqrt{t^2+1} - 1\right) - \log t\right]_1^2$$
$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \log\left(\sqrt{5} - 1\right) - \log\left(\sqrt{2} - 1\right) - \log 2$$

ポイント：$\displaystyle\int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}dt = \sqrt{t^2+1} + \log\left(\sqrt{t^2+1} - 1\right) - \log t$ である．

(問題 4.4　1. (2)　参照)

3.　つぎの曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2)　曲線 $C:\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれる図形の面積 $S(C)$ を求める．

$$S(C) = \int_0^1 y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \cdot \frac{dx}{dt}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}t\, dt + \left[t \cdot \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{4}dt$$
$$= \left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos 2t}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

ポイント：$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ を用いる．

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \frac{\cos 2t}{2}dt$ は，部分積分法を用いると，求めることができる．

問題4.4

4.　曲線Cが $r = f(\theta) \quad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ と極座標表示されるとき，C の長さは

$$l(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta$$

で与えられることを示し，これを用いて次の曲線の長さを求めよ．

(前半の証明)　曲線 $C : \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ の長さ $l(C)$ を求める．

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\Big\{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\Big\}^2 + \Big\{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\Big\}^2} d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

となるので，題意は示した．

ポイント：曲線 $C : r = f(\theta)$ は，$C : \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$ で表される．

(1)　曲線 $C : r = a(1 + \cos\theta) \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a > 0)$ の長さ $l(C)$ を求める．

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\Big\{a(1+\cos\theta)\Big\}^2 + (-a\sin\theta)^2}\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2 + 2\cos\theta}\ d\theta = \int_0^{2\pi} a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\ d\theta = \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\ d\theta - \int_\pi^{2\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\ d\theta \\ &= \left[4a\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi - \left[4a\sin\frac{\theta}{2}\right]_\pi^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

ポイント：$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$ を用いて，根号をはずす．

問題 4.4

5. 曲線 $C : y = f(x)$ は原点Oを通り，Oから C 上の点 $(a,\ f(a))$ $(a > 0)$ までの曲線の長さが $a^2 + a$ のとき，関数 $f(x)$ を求めよ．

(解答) 曲線 $C : y = f(x)$ の長さを $l(C)$ とすると，

$l(C) = \displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ となるので，

$\displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = a^2 + a$ が任意の $a > 0$ について成り立つ．

両辺を a で微分すると，$\displaystyle\frac{d}{da}\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 2a + 1$

$$\sqrt{1 + f'(a)^2} = 2a + 1$$

$$f'(a) = \pm 2\sqrt{a^2 + a}$$

よって，

$$f(x) = \int \pm 2\sqrt{x^2 + x}\, dx = \int \pm 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\, dx$$

$$= \pm\left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\log\left|\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\right| + C \right\}$$

$$= \pm\left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2 + x} - \frac{1}{4}\log\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x}\right) + C \right\}$$

$f(0) = 0$ より，$C = -\dfrac{1}{4}\log 2$ となるので，

$$f(x) = \pm\left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2 + x} - \frac{1}{4}\log\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x}\right) - \frac{1}{4}\log 2 \right\}$$

ポイント：$\displaystyle\frac{d}{da}\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + f'(a)^2}$ である．

$\displaystyle\int \sqrt{(x + p)^2 + a}\, dx = \frac{1}{2}\{(x + p)\sqrt{(x + p)^2 + a}$

$+a\log\left|x + p + \sqrt{(x + p)^2 + a}\right|\}$ である．