2.1 次の数列 $\{a_n\}$ について極限を求めよ．

(ⅳ) $a_n = \left(1+\dfrac{c}{n}\right)^n$ (c は正定数)

(解答) $a_n = \left\{\left(1+\dfrac{c}{n}\right)^{\frac{n}{c}}\right\}^c$ と変形できる．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^{\frac{n}{c}} = e$ なので，

求める極限は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = e^c$ である．

ポイント：c が正定数なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^{\frac{n}{c}} = e$ である．

c が負定数の場合，$c=-b$ とおくと b は正定数であり，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-b}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-b}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{b}{n-b}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left\{\left(1+\frac{b}{n-b}\right)^{\frac{n-b}{b}}\right\}^{b\cdot\frac{n}{n-b}}} = \frac{1}{e^b} = e^{-b} = e^c$$

となるので，問題が $a_n = \left(1+\dfrac{c}{n}\right)^n$ (c は負定数)

であっても，極限は同じである．(ただし，難易度は高くなる．)